

文章编号:1005-3085(2010)02-0347-06

## $H$ -矩阵的实用判定\*

郭 微, 孙玉祥

(北华大学数学学院, 吉林 132013)

**摘 要:** 利用矩阵对角占优理论, 给出了判定严格对角占优矩阵的若干充要条件。利用严格对角占优矩阵与非奇异  $H$ -矩阵之间蕴含的关系, 进一步给出了判定非奇异  $H$ -矩阵的一些充要条件, 从而拓展了非奇异  $H$ -矩阵的判定准则, 并用数值例子说明了这些结论的有效性。

**关键词:** 非奇异  $H$ -矩阵; 对角占优矩阵; 非零元素链

**分类号:** AMS(2000) 15A47

**中图分类号:** O151.21

**文献标识码:** A

### 1 引言

$H$ -矩阵作为一类特殊而重要的矩阵, 在许多实际应用领域发挥着重要的作用。然而, 判断  $H$ -矩阵却是十分困难的事情。近十年来,  $H$ -矩阵的判别引起了许多数学工作者的关注<sup>[1-7]</sup>, 这方面的研究已经成为计算数学和矩阵理论研究的重要课题之一。目前, 人们已经得到了许多判别  $H$ -矩阵的充分条件。本文利用对角占优矩阵理论, 给出了判定非奇异  $H$ -矩阵的一些充要条件, 拓展了非奇异  $H$ -矩阵的判定准则, 并用数值例子说明了这些结论的有效性。

用  $C^{n \times n}$  表示  $n$  阶的复方阵集合, 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 记

$$P_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad R_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{ji}|,$$

其中  $i, j \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ 。引入下列记号

$$M_1 = \{i \in N \mid P_i(A) < |a_{ii}| < R_i(A)\}, \quad M_2 = \{i \in N \mid R_i(A) < |a_{ii}| < P_i(A)\},$$

$$M_3 = \{i \in N \mid |a_{ii}| \geq P_i(A) > R_i(A)\}, \quad M_4 = \{i \in N \mid |a_{ii}| \geq R_i(A) > P_i(A)\},$$

$$M_5 = \{i \in N \mid |a_{ii}| > P_i(A) = R_i(A)\}, \quad M_0 = \{i \in N \mid |a_{ii}| \leq P_i(A), |a_{ii}| \leq R_i(A)\}.$$

**定义 1** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 若  $A$  的比较矩阵  $M(A) = (m_{ij})_{n \times n}$  为  $M$ -矩阵, 则称  $A$  为  $H$ -矩阵, 其中当  $i = j$  时,  $m_{ij} = |a_{ij}|$ ; 当  $i \neq j$  时,  $m_{ij} = -|a_{ij}|$ 。

**定义 2** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 若存在  $\alpha \in [0, 1]$ , 使

$$|a_{ii}| \geq \alpha P_i(A) + (1 - \alpha) R_i(A), \quad (1)$$

对每一个  $i \in N$  都成立, 则称  $A$  为  $\alpha$  对角占优矩阵, 记作  $A \in D_0(\alpha)$ ; 若 (1) 式中每个不等号都是严格的, 则称  $A$  为严格  $\alpha$  对角占优矩阵, 记作  $A \in D(\alpha)$ 。

收稿日期: 2006-07-20. 作者简介: 郭薇 (1976年6月生), 女, 硕士, 讲师. 研究方向: 基础数学.

\*基金项目: 国家自然科学基金 (10926169).

**定义3** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 若  $A$  为  $\alpha$  对角占优矩阵, 对任意满足 (1) 式取等号的  $i$ , 有  $A$  之非零元素链  $a_{ii_1}, a_{i_1 i_2}, \dots, a_{i_r j}$  使得

$$j \in J = \{i \in N \mid |a_{ii}| > \alpha P_i(A) + (1 - \alpha) R_i(A)\} \neq \emptyset,$$

则称  $A$  为非零元素链  $\alpha$  对角占优矩阵。

## 2 主要结果及证明

**引理1**<sup>[1]</sup> 如果  $A \in C^{n \times n}$  是严格  $\alpha$  对角占优矩阵, 则  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵。

**引理2**<sup>[2]</sup> 如果  $A \in C^{n \times n}$  为非零元素链  $\alpha$  对角占优矩阵, 则  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵。

**定理1** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 对任意的  $i \in N$ ,  $a_{ii} \neq 0$ , 则  $A \in D(\alpha)$  的充分必要条件是  $M_0 = \emptyset$ , 且对任意的  $i \in M_1$ ,  $j \in M_2$ , 有

$$\frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{|a_{jj}| - R_j(A)}{P_j(A) - R_j(A)} > 1. \quad (2)$$

**证明** 由  $A \in D(\alpha)$ , 则对任意的  $i \in M_1$ , 有  $|a_{ii}| > \alpha P_i(A) + (1 - \alpha) R_i(A)$ , 即

$$\alpha > \frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)},$$

知

$$1 - \alpha < \frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)},$$

则对任意的  $j \in M_2$ , 有  $|a_{jj}| > \alpha P_j(A) + (1 - \alpha) R_j(A)$ , 即

$$\alpha < \frac{|a_{jj}| - R_j(A)}{P_j(A) - R_j(A)}.$$

因此, 对任意的  $i \in M_1$ ,  $j \in M_2$ , 有

$$\frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{|a_{jj}| - R_j(A)}{P_j(A) - R_j(A)} > 1.$$

反之, 对任意的  $i \in M_1$ , 有

$$0 < \frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)} < 1,$$

则

$$0 < 1 - \frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)} < 1.$$

又对任意的  $j \in M_2$ , 有

$$0 < \frac{|a_{jj}| - R_j(A)}{P_j(A) - R_j(A)} < 1,$$

则由 (2) 式知存在  $0 < \alpha < 1$ , 使

$$1 - \frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)} < \alpha < \frac{|a_{jj}| - R_j(A)}{P_j(A) - R_j(A)}. \quad (3)$$

容易验证

$$1 - \frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)} = \frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)}.$$

由(3)式中

$$\alpha > \frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)},$$

知对任意的  $i \in M_1$ , 有  $|a_{ii}| > \alpha P_i(A) + (1 - \alpha)R_i(A)$ 。同理, 由

$$\alpha < \frac{|a_{jj}| - R_j(A)}{P_j(A) - R_j(A)}$$

知对任意的  $j \in M_2$ , 有  $|a_{jj}| > \alpha P_j(A) + (1 - \alpha)R_j(A)$ 。又因为对任意的  $k \in M_3 \cup M_4 \cup M_5$ , 由  $0 < \alpha < 1$ , 显然有  $|a_{kk}| > \alpha P_k(A) + (1 - \alpha)R_k(A)$ 。综上,  $A$  为严格  $\alpha$  对角占优矩阵, 即  $A \in D(\alpha)$ 。

**定理2** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 对任意的  $i \in N$ ,  $a_{ii} \neq 0$ ,  $M_0 = \emptyset$ , 若对任意的  $i \in M_1$ ,  $j \in M_2$ , 有(2)成立, 则  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵。

**证明** 由定理1知  $A \in D(\alpha)$ 。再由引理1知  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵。

由定理2我们立即可以得到下面两个推论。

**推论1** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 对任意的  $i \in N$ ,  $a_{ii} \neq 0$ ,  $M_0 = \emptyset$ , 若对任意的  $i \in M_1$ ,  $j \in M_2$ , 有

$$\frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{|a_{jj}| - R_j(A)}{P_j(A) - R_j(A)} \geq 1,$$

且对任意的  $i \in \Omega_1$ ,  $j \in \Omega_2$ , 有  $A$  之非零元素链  $a_{i_1 i_1}, a_{i_1 i_2}, \dots, a_{i_r k}$  和  $a_{j j_1}, a_{j_1 j_2}, \dots, a_{j_r k}$ , 使得  $k \in \Omega = N \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) \neq \emptyset$ , 则  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵。其中

$$\Omega_1 = \left\{ i \in M_1 \mid \frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{|a_{jj}| - R_j(A)}{P_j(A) - R_j(A)} = 1 \right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{ j \in M_2 \mid \frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{|a_{jj}| - R_j(A)}{P_j(A) - R_j(A)} = 1 \right\}.$$

**证明** 仿定理1的充分性证明过程, 可证  $A$  为非零元素链  $\alpha$  对角占优矩阵。再由引理2知  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵。

**推论2** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$  为不可约矩阵, 对任意的  $i \in N$ ,  $a_{ii} \neq 0$ ,  $M_0 = \emptyset$ , 若

$$\frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{|a_{jj}| - R_j(A)}{P_j(A) - R_j(A)} \geq 1,$$

且上式至少有一个不等式成立, 则  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵。

**定理3** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 对任意的  $i \in N$ ,  $a_{ii} \neq 0$ , 则  $A \in D(\alpha)$  的充分必要条件是  $M_0 = \emptyset$ , 且对任意的  $i \in M_1$ ,  $j \in M_2$ , 有

$$\frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)} < 1. \quad (4)$$

**证明** 由  $A \in D(\alpha)$ , 则对任意的  $i \in M_1$ , 有  $|a_{ii}| > \alpha P_i(A) + (1 - \alpha)R_i(A)$ , 即

$$\alpha > \frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)},$$

则对任意的  $j \in M_2$ , 有  $|a_{jj}| > \alpha P_j(A) + (1 - \alpha)R_j(A)$ , 即

$$\alpha < \frac{|a_{jj}| - R_j(A)}{P_j(A) - R_j(A)},$$

知

$$1 - \alpha > \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)}.$$

因此, 对任意的  $i \in M_1, j \in M_2$ , 有

$$\frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)} < 1.$$

反之, 对任意的  $i \in M_1$ , 有

$$0 < \frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} < 1,$$

则

$$0 < 1 - \frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} < 1.$$

又对任意的  $j \in M_2$ , 有

$$0 < \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)} < 1,$$

则由 (4) 式知存在  $0 < \alpha < 1$ , 使

$$\frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)} < 1 - \alpha < 1 - \frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)}. \quad (5)$$

易证

$$1 - \frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} = \frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)}.$$

由 (5) 式中

$$1 - \alpha < \frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)},$$

知对任意的  $i \in M_1$ , 有  $|a_{ii}| > \alpha P_i(A) + (1 - \alpha)R_i(A)$ 。同理, 由

$$1 - \alpha > \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)}$$

知对任意的  $j \in M_2$ , 有  $|a_{jj}| > \alpha P_j(A) + (1 - \alpha)R_j(A)$ 。又因为对任意的  $k \in M_3 \cup M_4 \cup M_5$ , 由  $0 < \alpha < 1$ , 显然有  $|a_{kk}| > \alpha P_k(A) + (1 - \alpha)R_k(A)$ 。综上,  $A$  为严格  $\alpha$  对角占优矩阵, 即  $A \in D(\alpha)$ 。

**定理 4** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 对任意的  $i \in N$ ,  $a_{ii} \neq 0$ ,  $M_0 = \emptyset$ , 若对任意的  $i \in M_1, j \in M_2$ , 有 (4) 成立, 则  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵。

**证明** 由定理 3 知  $A \in D(\alpha)$ 。再由引理 1 知  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵。

由定理 4 我们立即可以得到下面两个推论。

**推论 3** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ , 对任意的  $i \in N$ ,  $a_{ii} \neq 0$ ,  $M_0 = \emptyset$ , 若对任意的  $i \in M_1, j \in M_2$ , 有

$$\frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)} \leq 1,$$

且对任意的  $i \in L_1, j \in L_2$ , 有  $A$  之非零元素链  $a_{ii_1}, a_{i_1 i_2}, \dots, a_{i_r k}$  和  $a_{jj_1}, a_{j_1 j_2}, \dots, a_{j_r k}$ , 使得  $k \in L = N \setminus (L_1 \cup L_2) \neq \emptyset$ , 则  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵, 其中

$$L_1 = \left\{ i \in M_1 \mid \frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)} = 1 \right\},$$

$$L_2 = \left\{ j \in M_2 \mid \frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)} = 1 \right\}.$$

**证明** 仿定理3的充分性证明过程, 可证  $A$  为非零元素链  $\alpha$  对角占优矩阵。再由引理2知  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵。

**推论4** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$  为不可约矩阵, 对任意的  $i \in N, a_{ii} \neq 0, M_0 = \emptyset$ , 若

$$\frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)} \leq 1,$$

且上式至少有一个不等式成立, 则  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵。

### 3 数值例子

**例 设**

$$A = \begin{bmatrix} 80 & 16 & 5 & 15 \\ 16 & 80 & 20 & 10 \\ 24 & 40 & 35 & 10 \\ 40 & 26 & 4 & 40 \end{bmatrix}.$$

因为  $M_1 = \{1, 2\}, M_2 = \{3, 4\}, M_3 = M_4 = M_5 = M_0 = \emptyset$ , 则

$$\frac{|a_{11}| - P_1(A)}{R_1(A) - P_1(A)} = \frac{80 - 36}{80 - 36} = 1, \quad \frac{|a_{22}| - P_2(A)}{R_2(A) - P_2(A)} = \frac{80 - 46}{82 - 46} = \frac{17}{18},$$

$$\frac{|a_{33}| - R_3(A)}{P_3(A) - R_3(A)} = \frac{35 - 29}{74 - 29} = \frac{2}{15}, \quad \frac{|a_{44}| - R_4(A)}{P_4(A) - R_4(A)} = \frac{40 - 35}{70 - 35} = \frac{1}{7}.$$

因此, 对任意的  $i \in M_1, j \in M_2$ , 有

$$\frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{|a_{jj}| - R_j(A)}{P_j(A) - R_j(A)} = \frac{17}{18} + \frac{1}{7} > 1,$$

故由本文定理2知  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵。同时由

$$\frac{R_1(A) - |a_{11}|}{R_1(A) - P_1(A)} = \frac{80 - 80}{80 - 36} = 0, \quad \frac{R_2(A) - |a_{22}|}{R_2(A) - P_2(A)} = \frac{82 - 80}{82 - 46} = \frac{1}{18},$$

$$\frac{P_3(A) - |a_{33}|}{P_3(A) - R_3(A)} = \frac{74 - 35}{74 - 29} = \frac{13}{15}, \quad \frac{P_4(A) - |a_{44}|}{P_4(A) - R_4(A)} = \frac{70 - 40}{70 - 35} = \frac{6}{7}.$$

因此, 对任意的  $i \in M_1, j \in M_2$ , 有

$$\frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)} = \frac{1}{18} + \frac{6}{7} < 1,$$

故由本文定理4知  $A$  是非奇异  $H$ -矩阵。

## 参考文献:

- [1] 孙玉祥. 广义对角占优矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报, 1997, 19(3): 216-223  
Sun Y X. Sufficient conditions for generalized diagonally dominant matrices[J]. Numerical Mathematics: a Journal of Chinese Universities, 1997, 19(3): 216-223
- [2] Varga R S. On recurring theorems on diagonal dominance[J]. Linear Algebra Appl, 1976, 13: 1-9
- [3] 李继成, 黄廷祝, 雷光耀.  $H$ -矩阵的实用判定[J]. 应用数学学报, 2003, 26(3): 413-419  
Li J C, Huang T Z, Lei G Y. Practical criteria for  $H$ -matrices[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2003, 26(3): 413-419
- [4] 黄廷祝. 非奇  $H$ -矩阵的简捷判据[J]. 计算数学, 1993, 8(3): 318-328  
Huang T Z. Simple criteria for nonsingular  $H$ -matrices[J]. Mathematica Numerica Sinica, 1993, 8(3): 318-328
- [5] 沈光星. 非奇异  $H$ -阵的新判据[J]. 工程数学学报, 1998, 15(4): 21-27  
Shen G X. A new type of criteria for nonsingular  $H$ -matrices[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1998, 15(4): 21-27
- [6] 孙玉祥. 非奇异  $H$ -矩阵的判定[J]. 工程数学学报, 2000, 17(4): 45-49  
Sun Y X. Criteria for nonsingular  $H$ -Matrices[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2000, 17(4): 45-49
- [7] 高益明. 矩阵广义对角占优和非奇判定(II)[J]. 工程数学学报, 1988, 5(3): 12-17  
Gao Y M. Criteria for generalized diagonally dominant matrices and nonsingular matrices(II)[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1988, 5(3): 12-17

Practical Criteria for  $H$ -Matrix

GUO Wei, SUN Yu-xiang

(Department of Mathematics, Beihua University, Jilin 132013)

**Abstract:** By using the theory of diagonally dominant matrices, we give some sufficient and necessary conditions for strictly diagonally dominant matrices. Furthermore, we give some sufficient and necessary conditions for nonsingular  $H$ -matrices by their relations. So the criteria for nonsingular  $H$ -matrices are expanded, and the efficiency of the proposed criteria is showed by a numerical example.

**Keywords:** nonsingular  $H$ -matrix; diagonally dominant matrix; chain of nonzero elements